13-10-21 9η Διάλεξη

Ορισμός: Λέμε ότι $\{a_n\}$ ισούται τελικά με a, αν $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall\ n \geq n_0,\ a_n = a$.

Σπίτι: Ν.δ.ο $\forall$ αριθμός γράφεται ως δεκαδ. αναπ.

Λήμμα: Έστω $\left.\begin{aligned} x &= 0,a_1a_2\ldots \\ &= 0,b_1b_2 \end{aligned}\right\}$ όπου $a_i, b_i \in \{0, \ldots$, $i \in \mathbb{N}$

Ίδιο λήμμα με το πάνω απλά το κάνω ώστε να έχω εύκολη απόδειξη.

Αν $\{a_n\} \neq \{b_n\}$ τότε η $\{a_n\}$ ισούται με 9 και $\{b_n\}$ με 0 ή ανάποδα.

Απόδειξη

Θέτω $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$. Έστω πχ $a_{n_0} > b_{n_0}$

$x - y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n} = \cancel{\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n 10^{-n}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n 10^{-n} -$

$$\left(\cancel{\sum_{n=1}^{n_0-1} b_n 10^{-n}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n\cdot 10^{-n}\right) =$$

$$= a_{n_0}\cdot 10^{-n_0} - b_{n_0}\cdot 10^{-n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n - b_n)\cdot 10^{-n} \underset{a_{n_0}-b_{n_0}>1}{\geq}$$

$$(10^{-n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n - b_n)\, 10^{-n}$$

- $a_n - b_n \geq -9 \ \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x-y \geq 10^{-n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (-9)\cdot 10^{-n}$

$$\Rightarrow x-y \geq (10)^{-n_0} + (-9)\,(10)^{-(n_0+1)}\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (10)^{-n}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r|<1}$$

$$= (10)^{-n_0} - 9(10)^{-(n_0+1)}\cdot \frac{1}{1-1/10} =$$

$$= (10)^{-n_0} - 9\cdot(10)^{-(n_0+1)}\cdot 10/9 = 0$$

$\Rightarrow x-y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$ και η ισότητα ισχύει

ΜΟΝΟ ΑΝ $a_n - b_n = -9 \ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow a_n = 0$ και $b_n = 9 \ \forall n \geq n_0$

<u>Θεώρημα</u>: Το $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο

Απόδειξη

Έστω ότι είναι αριθμ., τότε όλα τα στοιχεία του $(0,1)$ μπορούν να γραφούν σαν ακολουθία. Δλδ $\exists$ απεικόνιση f "1-1" και "επί"

$x_1 = 0, a_1^1 a_1^2 a_1^3 \dots a_1^{n}$ δείκτης

$x_2 = 0, a_2^1 a_2^2 \dots a_2^n$

$x_n = 0, a_n^1 a_n^2 \dots a_n^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ διαλέγω τυχαία $b_n \in \{0, 1, \dots 9\} \setminus \{0, 9, a_n^n\}$

$\Rightarrow$

- $0, b_1 b_2 \dots \in (0,1)$
- $\{b_n\} \neq \{a_j^n\} \; \forall j \in \mathbb{N}$
- $\{b_n\}$ δεν είναι τελικά 0 ή 9

$\left.\right\}$ $0, b_1 b_2 \dots \neq 0, a_j \; \forall j \in \mathbb{N}$ άτοπο

Άρα, $(0,1)$ υπεραριθμήσιμο.

<u>Πόρισμα</u>: Τα σύνολα (a,b), $(a,b]$, $[a,b]$, $[a,b] \setminus \mathbb{Q}$, $(a,b) \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμα

Απόδειξη $\Rightarrow$ Άσκηση

<u>Sup-Inf</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Το A ονομάζεται άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο αν $\exists M > 0$ τ.ω $\forall x \in A$, $x \leq M^{(*)}$ ($x \geq -M^{(**)}$). Το A λέγεται φραγμένο αν είναι άνω κ' κάτω φραγμένο $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ τ.ω $|x| \leq M \; \forall x \in A$

(*) Άνω Φράγμα (**) Κάτω Φράγμα

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φρ. (αντ. κάτω φρ.) τότε ο αριθμός $k \in \mathbb{R}$ ονομάζεται supremum ($\mu \in \mathbb{R}$ λέγεται infimum) του A αν:

(i) $x \leq k,\ \forall x \in A$ (αντ. $x \geq k\ \forall x \in A$)

(ii) $\forall k' \in \mathbb{R}$ τ.ω $x \leq k'\ \forall x \in A$ ισχύει $k \leq k'$
($\forall k' \in \mathbb{R}$ τ.ω $x \geq k'\ \forall x \in A$ -//- $k' \leq k$)

(*) Δλδ το k είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A (αντ. k είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A).

Συμβ. $k = \sup A$
$k = \inf A$.

<u>Πχ</u>: $A = \{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Ν.δ.ο $\sup A = 1$

<u>Λύση</u>

(i) το 1 είναι άνω φράγμα του A αφού $1 - \frac{1}{n} \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Έστω $k \in \mathbb{R}$ ένα άνω φράγμα του $A \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq k\ \forall n \in \mathbb{N}$
Αν $k < 1 \Rightarrow$ Για $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{1}{1-k>0}$ έχουμε $1 - \frac{1}{n_0} \leq k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n_0} \geq 1 - k \Leftrightarrow n_0 \leq \frac{1}{1-k}$ άτοπο. Άρα $k \geq 1$

<u>Αξίωμα Πληρότητας</u>: Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας έχει sup

$\Updownarrow$

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε μη κενό κάτω φρ. υποσύνολο A της πραγματικής ευθείας έχει inf

Απόδειξη

Ορίζω $-A = \{-x,\ x \in A\} \Rightarrow -A$ άνω φρ. $\Rightarrow -A$ έχει sup.

Θέτω $M = \sup(-A) \in \mathbb{R}$ (M άνω φ. του $-A$)

$\Rightarrow$ (i) $-x \leq M \ \forall x \in A \iff x \geq -M \ \forall x \in A$

(ii) Αν $M' \in \mathbb{R}$, τ.ω $-x \leq M' \ \forall x \in A$ τότε $M' \geq M \iff$ Αν $M' \in \mathbb{R}$ τ.ω $x \geq -M'$ $\forall x \in A$ τότε $-M' \leq -M$

Άρα $\inf A = -M$.

Παρατήρηση: • $\inf(-A) = -\sup A$ (A μη κενό και άνω φρ.)

• $\sup(-A) = -\inf A$

Προκύπτει από προηγ. αποδ.

Σύμβαση: • Αν $A \overset{\neq \emptyset}{\subseteq} \mathbb{R}$, A δεν είναι άνω φρ. τότε $\sup A = +\infty$

• -//- -//- -//- κάτω φ. -//- $\inf A = -\infty$

• Αν $A = \emptyset$ ορίζω $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$

• Ισχύει πάντα $\sup A \geq \inf A$ εκτός αν $A = \emptyset$.

Πρόταση: Έστω A μη κενό και άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}$. Έστω $M \in \mathbb{R}$ (αντ. $m \in \mathbb{R}$) τότε, $M = \sup A$ (αντ. $m = \inf A$) αν-ν

(i) M άνω φράγμα του A (αντ. m κάτω φρ. του A)
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x = x_\varepsilon \in A$ τ.ω $x > M - \varepsilon$
(αντ. $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x = x_\varepsilon \in A$ τ.ω $x < m + \varepsilon$)

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" (i) $M = \sup A \Rightarrow M$ άνω φρ. του A
(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $\nexists\, x \in A$ τ.ω $x > M - \varepsilon \Rightarrow$
$x \leq M - \varepsilon \;\; \forall x \in A \Rightarrow M - \varepsilon$ άνω φρ. του A.
Άτοπο, αφού $M - \varepsilon < M$

"$\Leftarrow$" M άνω φράγμα του A.
Αν $\exists\, M' \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A, με $M' < M$. Τότε για $\varepsilon = M - M'$ από (ii) $\Rightarrow \exists\, x \in A$ τ.ω $x > M - \varepsilon = M'$
Άτοπο. Άρα, $M = \sup A$

Πυκνότητα Ρητών - Άρρητων

Θεώρημα: Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε $(a,b) \cap \mathbb{Q}$
$(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ είναι άπειρα.

Ακολουθίες

Ορισμοί: Έστω $\{a_n\}$ πραγματική ακολουθία. Λέμε ότι $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\boxed{\text{συγκλίνει}}$ αν $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0, \; |a_n - \ell| < \varepsilon$

• Λέμε ότι $a_n \to \infty$ αν $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω
$a_n > M$

• Λέμε ότι $a_n \to -\infty$ αν $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$
$a_n < -M$

• Αν η $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει και $a_n \not\to \pm\infty$ λέμε ότι ταλαντεύεται

• $\{a_n\}$ αύξουσα (αντ. γν. αύξουσα) αν $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (αντ. $a_n < a_{n+1}$)

• $\{a_n\}$ φθίνουσα (αντ. γν. φθίνουσα) αν $\{a_n\}$ αύξουσα (αντ. γν. αύξουσα)

• $\{a_n\}$ μονότονη (αντ. γν. μονότονη) αν $\{a_n\}$ αύξ. ή φθ. (αντ. γν. αύξ. ή γν. φθ.)

Πρόταση: Έστω $\{a_n\}$ αύξουσα (αντ. φθίνουσα).
Τότε, $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
(αντ. $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$)

(*) Ειδικότερα κάθε μονότονη και φραγμένη συγκλίνει.

Απόδειξη

Παίρνοντας $\{-a_n\}$ αρκεί να υποθέσω ότι $\{a_n\}$ αύξ.
• Έστω ότι $\{a_n\}$ μη-άνω-φραγμένη $\Rightarrow \forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω
$a_{n_0} > M$

$\xRightarrow[\forall n \geq n_0]{a_n \geq a_{n_0}} a_n > M \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \to \infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

• Έστω ότι $\{a_n\}$ φραγμ. $\Rightarrow M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.
Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $a_n > M - \varepsilon \xRightarrow[\forall n > n_0]{a_n \geq a_{n_0}} a_n > M - \varepsilon$
$\forall n \geq n_0$

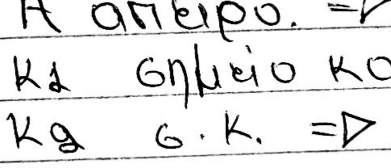
Αφού $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$: $M - \varepsilon < a_n < M < M + \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \to M$.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε πραγματική ακολουθία $\{a_n\}$ έχει μονότονη υπακολουθία

Απόδ.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. το n θα λέγεται σημείο κορυφής αν $\forall m > n$, $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n > a_m$.
Θέτω $A = \{n \in \mathbb{N} : n$ σημείο κορυφής$\}$.



<u>1η περίπτωση</u>

A άπειρο. $\Rightarrow \exists\, k_1, k_2, \dots \in A$ τ.ω $k_1 < k_2 < \dots < k_n \dots$
k_1 σημείο κορυφής $\Rightarrow a_{k_1} > a_m \ \forall m > k_1 \Rightarrow a_{k_1} > a_{k_2}$
k_2 σ.κ. $\Rightarrow a_{k_2} > a_m \ \forall m > k_2 \Rightarrow a_{k_2} > a_{k_3}$
$\vdots$
k_n σ.κ. $\Rightarrow \dots\dots \Rightarrow a_{k_{n-1}} > a_{k_n} \ \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \{a_{k_n}\}$ γν. φθίνουσα υπακ. της $\{a_n\}$

2η περίπτωση

A πεπερασμένο $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall\, n \geq n_0$, το a_n δεν είναι σ.κ.

Θέτω $k_1 = n_0 \Rightarrow k_1$ όχι σ.κ $\Rightarrow \exists\, k_2 > k_1$ τ.ω $a_{k_2} \geq a_{k_1}$

k_2 όχι σ.κ $\Rightarrow \exists\, k_3 > k_2$ τ.ω $a_{k_3} \geq a_{k_2}$

⋮

Άρα, $\{a_{k_n}\}$ αύξουσα υπακ. της $\{a_n\}$.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακ. έχει συγκλίνουσα υπακ.

Απόδειξη

Έπεται άμεσα από τις 2 προηγούμενες προ.